Crossfit cerebral N.° 14

Ilusiones y juegos matemáticos

Magia matemática

Vamos a presentar un 'truco de magia' que permite adivinar el día de cumpleaños de una persona a través de unas tarjetas especiales. Vayamos primero al truco y, después, vamos a ver por qué funciona.

La cosa es muy sencilla: se le muestra a algún participante (del que no sepamos su día de cumpleaños, porque la gracia es descubrirlo) las siguientes tarjetas en orden, mientras se le pregunta si ve en cada tarjeta el día de su cumpleaños.

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

Se comienza con la tarjeta que tiene el 16, luego la del 8, la del 4, la del 2 y finalmente la del 1. Estos números serán los que identifiquen a cada tarjeta. Para adivinar el día de cumpleaños simplemente se suman los números correspondientes a las tarjetas que haya contestado que sí.

Por ejemplo, si el participante cumple años el día 20, habrá dicho 'sí' en las tarjetas con el 4 y 16, por lo que hacemos 16 + 4 = 20. Si cumple el 23, dijo que 'sí' a las tarjetas identificadas con el 1, el 2, el 4 y el 16, por lo que hacemos 16 + 4 + 2 + 1 = 23. Verán que, en realidad, el orden de las tarjetas no importa, siempre y cuando sepamos la identificación de cada una para poder sumar los números correspondientes.

Se pueden imprimir estas tarjetas desde el código QR que dejamos al final para probar con varias personas y convencernos de que realmente funciona. Ahora… ¿por qué funciona? Claramente, quien hace el trabajo es la matemática y vamos a ver de qué manera.

Nosotros estamos acostumbrados a expresarnos en sistema decimal. Cuando escribimos un número, por ejemplo el 235, estamos representando 2 centenas, 3 decenas y 5 unidades. Es decir, 235 = 2 · 100 + 3 · 10 + 5 · 1. No hacemos esa cuenta cada vez que leemos un número porque ya lo hemos naturalizado. Notar que 100, 10 y 1 son potencias con base 10:

$$100 = 10^2, \quad 0 = 10^1, \quad 1 = 10^0,$$

(para quien no recuerde, todo número distinto de cero elevado a la cero da 1 como resultado).

Al dar un número como este, es decir, uno de 3 cifras, no solamente estamos diciendo que el número tiene unidades, decenas y centenas, sino que además estamos indicando cuántas de ellas (en nuestro ejemplo, son 5, 3 y 2, respectivamente). Esto último lo hacemos mediante los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, es decir, tenemos 10 opciones. Así, el número más grande de 3 cifras que podemos formar es tomando 9 unidades, 9 decenas y 9 centenas, y obtenemos el 999.

Pensemos ahora en una máquina mucho más básica que no sepa comprender esto de las cantidades, sino que solo comprenda instrucciones básicas como 'sí/no'. Esto no alcanza para representar un número. Saber que un número sí tiene decenas, no tiene centenas y sí tiene unidades no es suficiente para determinarlo. Hay muchos números que satisfacen esto, por ejemplo: 802, 706, 104, y muchos más.

Si asociamos el 1 con el 'sí' y el 0 con el 'no', estamos ahora considerando solo 2 dígitos en lugar de 10. Cambiemos entonces el sistema decimal por el binario. Esto significa tomar potencias con base 2 en lugar de base 10, y usar solo los dígitos 0 y 1. Para ilustrar la idea vamos a considerar solo las siguientes potencias:

$$2^4, \quad 2^3, \quad 2^2, \quad 2^1, \quad 2^0$$

Esto equivale a los valores 16, 8, 4, 2 y 1, respectivamente.

Veamos qué números podemos representar diciendo 'sí' o 'no' en cada una de estas cantidades (lo indicamos con 1 o 0, respectivamente), y luego sumando como lo hicimos con la base 10 al comienzo. Hagamos algunos ejemplos en un cuadro:

16	8	4	2	1	Número representado
1	0	1	0	1	16 + 4 + 1 = 21
0	1	1	0	0	8 + 4 = 12
0	0	1	1	1	4 + 2 + 1 = 7
1	1	0	1	0	16 + 8 + 2 = 26

Un número binario es una secuencia ordenada de 1 (unos) y 0 (ceros). Así, el número 21 se expresa en sistema binario como 10101.

¿Cuál es el número más grande que podemos representar utilizando números binarios de 5 dígitos? Esto significa poner un 1 en cada una de las columnas de la tabla anterior, y se obtiene 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31, es decir, suficiente para cubrir todos los días posibles para una fecha de cumpleaños.

Volvamos entonces a las tarjetas a las que, por lo anterior, llamaremos *tarjetas binarias*. Supongamos que alguien cumple años un día 21. ¿En qué tarjetas hubiera dicho que sí? Observando la imagen de las tarjetas, el número 21 aparece en la primera, la tercera y la quinta, y no aparece en la segunda y en la cuarta. *¡Comparar esto con los números de la primera fila de la tabla!*

Las tarjetas no están armadas al azar. En la primera están todas las cantidades que en la tabla tendrían un 1 debajo del 16 (por eso son todos mayores o iguales que él en la tarjeta). El mismo razonamiento se aplica a cada tarjeta. En ese orden, las tarjetas representan las columnas de nuestra tabla.

Al decir 'sí' o 'no', estamos completando con los unos y ceros la fila correspondiente al número de cumpleaños, y así podemos calcularlo.

Notar que todos los números impares deben estar sí o sí en la última tarjeta, pues no habría otra forma de obtenerlos si no están allí.

Preguntas

¿Qué cantidad representa el número binario 11111? ¿Cuál es la cantidad más grande que se puede representar con un número binario de 7 dígitos?

De burbujas y algoritmos

Supongamos que estas personas tienen una fila de cartas frente a ellas, dispuestas así:

Belu tiene bastos: 5, 7, 9, 3, 10, 11
Orne tiene oros: 10, 9, 6, 4, 2, 1
Carlos tiene copas: 3, 6, 8, 10, 11, 12
Elena tiene espadas: 1,12, 2, 11, 3, 10

Y ordenan las cartas (de menor a mayor) con el siguiente *algoritmo*:

> Empezar de la izquierda, tomar la primera carta; si es más chica que la siguiente, volver a dejarla en su lugar y pasar a la siguiente carta.
> Pero si es más grande, intercambiarla con la carta siguiente y comenzar nuevamente desde la izquierda de todo.
> Repetir así hasta llegar al final.

¿Quién termina más rápido? ¿Cuál es el peor caso?

Conclusión/corolario

En computación existen los famosos algoritmos, que son nada más ni nada menos que un montón de reglas muy precisas de cómo realizar una tarea, muy probablemente con reglas como esta de 'si estoy en este caso hago esto y si no, lo otro'. Este tipo de reglas o instrucciones son lo que los hacen verdaderamente poderosos, porque les permiten funcionar en *distintos escenarios*. Notemos que cualquiera puede ordenar sus cartas usando el mismo algoritmo, denominado *burbujeo*. Se denomina así porque si te imaginás a Belu, Orne, Carlos y Elena en *cámara rápida*, te va a parecer como que sus cartas grandes son 'burbujas' que van subiendo por la lista.

¿Existirá un algoritmo de ordenamiento que en su peor caso sea aún mejor que el burbujeo? ¿Se te ocurre alguno?

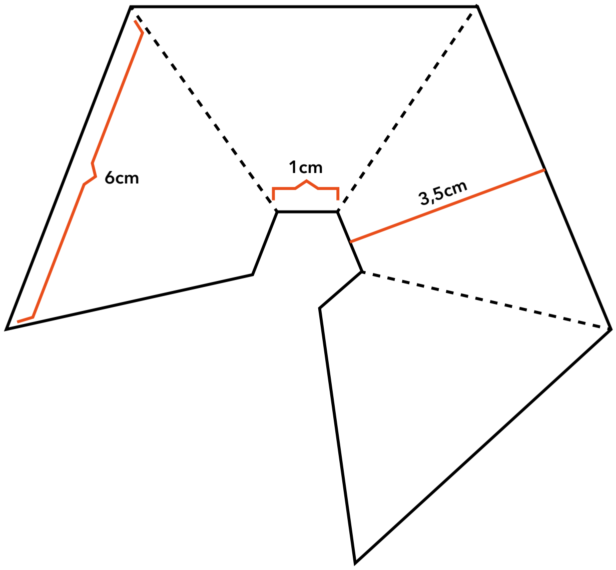
Las cartas de Belu

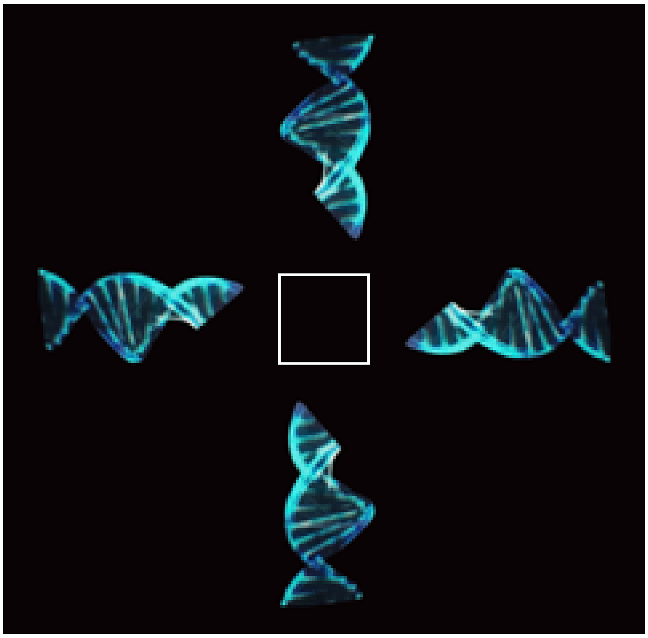
Escaneá con tu celu para ver una animación del ordenamiento por burbujeo

Pirámides holográficas: de la ciencia ficción a tu casa

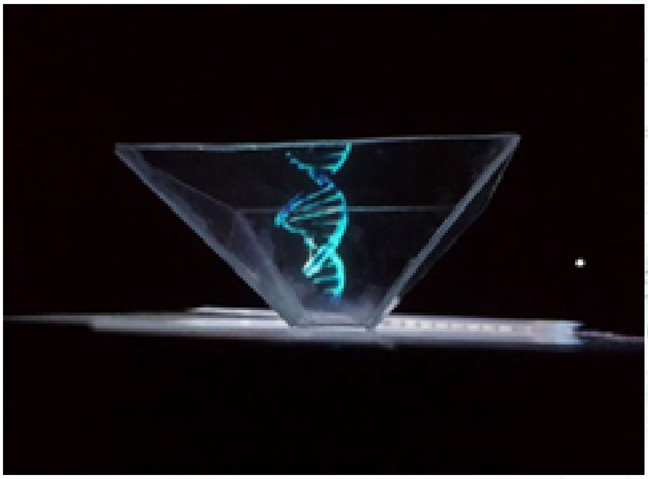
Puede que los hologramas nos recuerden a las películas de ciencia ficción, pero realizar uno de forma casera es en realidad bastante sencillo: basta con tener disponible un celular, acetato transparente (o cualquier plastiquito plano que tengas dando vueltas por ahí), tijeras y pegamento para poder armarlo.

En primer lugar, deberías cortar el acetato siguiendo las medidas de la imagen y pegar los extremos para formar así la pirámide. Luego, buscá una imagen o video similar a la fotografía que te mostramos a continuación, en tu celular (en internet hay muchísimas opciones disponibles para que experimentes). Necesitamos cuatro imágenes idénticas del objeto que queremos ver representado en forma de holograma dispuestas de manera enfrentada sobre un fondo negro. Por último, simplemente colocá la pirámide sobre tu celular, en el medio de las figuras (donde está representado el cuadrado blanco de la imagen).





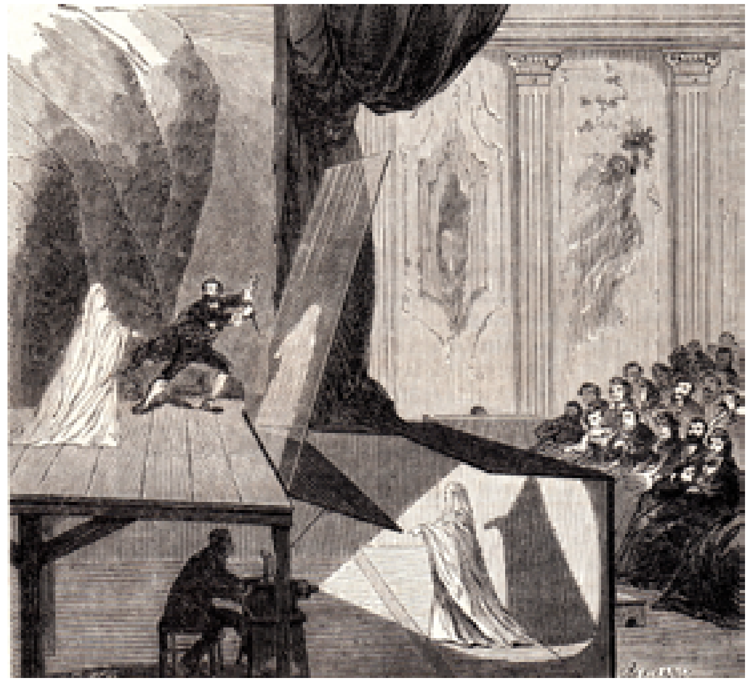
En esta instancia, deberías poder visualizar un holograma similar al que te mostramos en la siguiente fotografía. Pero… ¿cómo se produce esta ilusión?



Las pirámides holográficas funcionan gracias al fenómeno de reflexión. La reflexión es el fenómeno óptico por el cual los rayos de luz que inciden sobre una superficie chocan, se desvían y regresan al medio del que salieron formando un ángulo igual al de la luz incidente. Entonces, en este caso, la luz de cada imagen que se emite en la pantalla del celular incide en cada una de las paredes de la pirámide de acetato con un cierto ángulo y se refleja hacia nuestros ojos cuando nos posicionamos en frente de cada una de las caras de la pirámide. Estas cuatro proyecciones en conjunto crean la ilusión de que hay un objeto tridimensional adentro de la pirámide. Una forma alternativa y rápida de probar este fenómeno consiste en inclinar a 45° una tapa de CD o cualquier plástico transparente sobre una imagen en un celular o una computadora. Deberías observar un efecto similar al que se observa con la pirámide.

La ilusión óptica que se logra con la pirámide holográfica fue muy aprovechada en el teatro hacia 1862, aunque con algunas modificaciones. La técnica que se utilizaba se llamaba 'el fantasma de Pepper', y consistía en que el actor que iba a cumplir el rol de fantasma actuara fuera de la vista del público, debajo del escenario (tal como se muestra en el dibujo). Este, a su vez, era fuertemente iluminado, y así, la luz que iluminaba al actor se reflejaba en un vidrio orientado a 45° hacia el público, generando la ilusión de que había una figura fantasmagórica por encima del escenario.

En una versión más moderna de esta misma ilusión, complementada con efectos especiales y animaciones, se logró homenajear al rapero americano Tupac Shakur, fallecido en 1996. Para esto se proyectaron filmaciones de presentaciones antiguas del cantante sobre una película transparente suspendida en ángulo frente al escenario, generando la ilusión de que el artista estaba encima del escenario.



Soluciones

Magia matemática

El número representa al 63. La cantidad más grande que podemos representar con un número binario de 7 dígitos es 127.

De burbujas y algoritmos

Quien termina más rápido es Carlos, porque tiene la lista ordenada de menor a mayor. Nunca intercambia ninguna carta, así que llega al final de una sin tener que volver a empezar. Quien tarda más es Orne, porque tiene todo ordenado exactamente al revés: así que primero empieza con '10, 9, 6, 4, 2, 1', luego intercambia el 10 por el 9 y vuelve a empezar con '9, 10, 6, 4, 2, 1', y luego el 10 por el 6, y luego vuelve a empezar, y así llevando el 10 hacia el final, luego el 9, luego el 6... y así. Hay muchos algoritmos de ordenamiento, uno de los más interesantes, y muy superior al 'burbujeo' es el *quick sort*, en el que se elige un 'pivote', se separan las cartas menores a ese pivote por un lado, las mayores por el otro, y se vuelven a ordenar con *quick sort* esos dos grupos.

Equipo de la sección 'Ilusiones y juegos matemáticos'

Federico Barrera Lemarchand
Físico, UTDT, UBA-Conicet.
fedex192@gmail.com

Marilina Carena
Matemática, UNL-Conicet.
marilcarena@gmail.com

Giulia Solange Clas
Bióloga, INEU, FLENI-Conicet.
clas.giulia.s@gmail.com

Nicolás Fernández Larrosa
Biólogo, IFIBYNE, UBA-Conicet.
fernandezlarrosanicolas@gmail.com

Pablo Groisman
Matemático, UBA-Conicet.
pgroisma@dm.uba.ar

Matías López-Rosenfeld
Computador, UBA-Conicet.
mlopez@dc.uba.ar

Mariano I Martínez (coordinador)
Biólogo, MACN-Conicet.
mmartinez@macn.gov.ar

Juan Pablo Pinasco
Matemático, UBA-Conicet.
jpinasco@gmail.com

Alfredo Sanzo
Ingeniero, UTN, UBA-Conicet.
alfredo.sanzo@gmail.com

Preguntas, comentarios y sugerencias: ***contacto@cienciahoy.org.ar***